Trygonometria bez użycia tablic i kalkulatora

Propozycja na kółko matematyczne i nie tylko

Trygonometria to jeden z ciekawszych działów w matematyce. Różnorodność zadań z trygonometrii i jej zastosowanie w innych działach matematyki nie mają końca.

Tomasz Grębski

W artykule tym przedstawione są rozwiązania zadań z trygonometrii typu: „oblicz bez użycia kalkulatora i tablic…" czy „udowodnij bez użycia kalkulatora…". Jak należy je rozwiązać? Jakie sztuczki zastosować? Zapraszam do czytania.

Na początek przedstawiam kilkanaście przydatnych wzorów. Niektóre z nich są dobrze znane, a niektóre – rzadziej stosowane – warto przypomnieć lub nawet poznać. Obok wzorów jest numeracja, która jest wykorzystywana podczas rozwiązania poszczególnych zadań celem wskazania wykorzystanego wzoru.

(1) $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

(2) $\mathrm{tg} x = \dfrac{\sin x}{\cos x}, \mathrm{ctg} x = \dfrac{\cos x}{\sin x}$

(3) $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$

(4) $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x$

(5) $\sin 3x = \sin x (3 - 4\sin^2 x)$

(6) $\cos 3x = \cos x (4\cos^2 x - 3)$

(7) $\mathrm{tg} 2x = \dfrac{2\mathrm{tg} x}{1 - \mathrm{tg}^2 x}$

(8) $\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$

(9) $\sin(x - y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y$

(10) $\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$

(11) $\cos(x-y)=\cos x\cos y+\sin x\sin y$

(12) $\sin(90°-x)=\cos x$

(13) $\cos(90°-x)=\sin x$

(14) $\operatorname{tg}(90°-x)=\operatorname{ctg}x$

(15) $\sin x\cos y=\frac{1}{2}[\sin(x+y)+\sin(x-y)]$

(16) $\cos x\cos y=\frac{1}{2}[\cos(x+y)+\cos(x-y)]$

(17) $\sin x\sin y=\frac{1}{2}[\cos(x-y)-\cos(x+y)]$

(18) $\sin x+\sin y=2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$

(19) $\sin x-\sin y=2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$

(20) $\cos x+\cos y=2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$

(21) $\cos x-\cos y=-2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$

(22) $\operatorname{tg}(x+y)=\frac{\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}y}{1-\operatorname{tg}x\cdot\operatorname{tg}y}$

Przejdźmy teraz do części praktycznej. Na początek dwa łatwiejsze zadania.

Zadanie 1

Oblicz bez użycia kalkulatora: sin 15°.

Rozwiązanie:

I sposób:

$$\sin 15°=\sin(45°-30°)\overset{(9)}{=}\sin 45°\cos 30°-\cos 45°\sin 30°=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

II sposób: Zastosujemy wzór na cosinus podwojonego kąta (4).

$$\cos 30°=1-2\sin^2 15°$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2}=1-2\sin^2 15°$$

$$2\sin^2 15°=1-\frac{\sqrt{3}}{2}\ /:2$$

$$\sin^2 15°=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$\sin^2 15°=\frac{2-\sqrt{3}}{4}\ /\sqrt{\ }$$

$$\sin 15°=\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{4}}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}\cdot\frac{2}{2}=\frac{\sqrt{8-4\sqrt{3}}}{4}=\frac{\sqrt{(\sqrt{6}-\sqrt{2})^2}}{4}=\frac{|\sqrt{6}-\sqrt{2}|}{4}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

Zadanie 2

Oblicz bez użycia kalkulatora: cos 75°.

Rozwiązanie:

$$\cos 75^\circ = \cos(45^\circ + 30^\circ) \overset{(10)}{=} \cos 45^\circ \cos 30^\circ - \sin 45^\circ \sin 30^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}.$$

Teraz zajmiemy się mniej typowymi kątami: 18°, 36°, 72°.

Zadanie 3

Oblicz bez użycia kalkulatora i tablic dokładną wartość sin 18°.

Rozwiązanie:

• Metoda algebraiczna:

Niech $\alpha = 18^\circ$, zatem $5\alpha = 90^\circ$

$5\alpha = 2\alpha + 3\alpha = 90^\circ \Rightarrow 2\alpha = 90^\circ - 3\alpha$

Zatem:

$\sin 2\alpha = \sin(90^\circ - 3\alpha) \overset{(12)}{=} \cos 3\alpha$

$\sin 2\alpha = \cos 3\alpha$

Korzystamy teraz ze wzorów na sinus podwojonego (3) i kosinus potrojonego kąta (5).

$2\sin\alpha\cos\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$

$2\sin\alpha\cos\alpha - 4\cos^3\alpha + 3\cos\alpha = 0$

$\cos\alpha(2\sin\alpha - 4\cos^2\alpha + 3) = 0$

$\cos\alpha = 0 \vee 2\sin\alpha - 4\cos^2\alpha + 3 = 0$

Ponieważ założyliśmy, że $\alpha = 18^\circ$, to pierwsze równanie jest sprzeczne. Zatem:

$2\sin\alpha - 4\cos^2\alpha + 3 = 0$

Korzystamy z jedynki trygonometrycznej (1).

$2\sin\alpha - 4(1 - \sin^2\alpha) + 3 = 0$

$4\sin^2\alpha + \sin\alpha - 1 = 0$

Podstawiamy nową zmienną wraz z odpowiednim założeniem:

$\sin\alpha = t, t \in \langle -1, 1\rangle$

$4t^2 + t - 1 = 0$

Po rozwiązaniu powyższego równania otrzymujemy:

$$\left\{t = \frac{-1-\sqrt{5}}{4} \vee t = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}\right\} \wedge t \in \langle -1, 1\rangle \wedge t > 0 \Rightarrow t = \frac{\sqrt{5}-1}{4} \wedge t = \sin\alpha = \sin 18^\circ,$$

czyli $\sin 18^\circ = \dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$.

• Metoda geometryczna (wykorzystanie trójkąta prostokątnego):

Rysujemy trójkąt prostokątny *ABC*. Oznaczamy miary kątów ostrych jako:

$\angle ABC = 18°$ oraz $\angle ACB = 72°$.

Prowadzimy środkową *AD*, a następnie na odcinku *CD* zaznaczamy taki punkt *E*, że $|AE| = |AC|$. Otrzymujemy trzy trójkąty równoramienne: ΔABD, ΔAEC, ΔADE. W trójkącie *AEC* prowadzimy wysokość *AH*. Wprowadźmy teraz wartości kątów. Korzystając z tego, że suma kątów wewnętrznych trójkąta wynosi 180° oraz z kątów przyległych otrzymujemy następujące wartości:

$\angle ABC = 18°$

$\angle ADB = 144°$

$\angle ADE = 36°$

$\angle AED = 108°$

$\angle AEC = 72°$

$\angle CAH = 18°$

$\angle HAE = 18°$

Przyjmijmy (bez straty na jakości rozwiązania), że:

$|AC| = |AE| = 1$ (ΔAEC jest równoramienny)

$|CH| = |HE| = \mathrm{x}$ (ΔAEC jest równoramienny)

$|AE| = |ED| = 1$ (ΔAED jest równoramienny)

Zatem:

$|CD| = |AD| = |DB| = 2x + 1$

Z ΔAHC i twierdzenia Pitagorasa mamy:

$|AH| = \sqrt{1-x^2}$

Z ΔABC i twierdzenia, że kwadrat długości wysokości opuszczonej z wierzchołka kąta prostego równy jest iloczynowi długości odcinków, na jakie podzieliła ona przeciwprostokątną, mamy:

$|AH|^2 = |CH| \cdot |HB|$

$(\sqrt{1-x^2})^2 = x \cdot (3x+2)$

$1 - x^2 = 3x^2 + 2x$

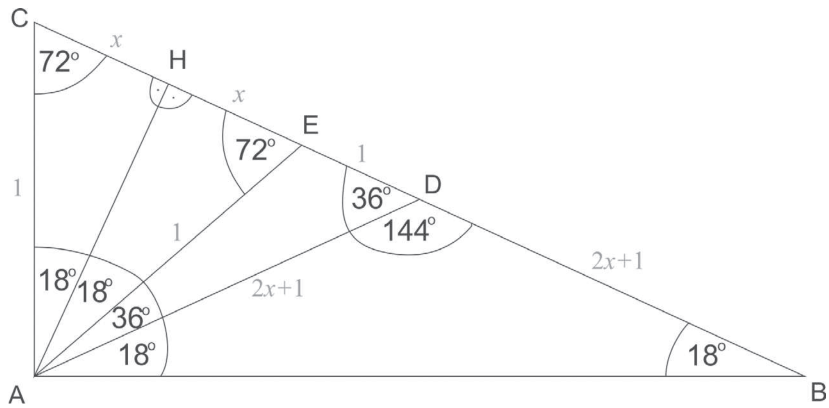
$4x^2 + 2x - 1 = 0$

$\Delta = 20, \sqrt{\Delta} = 2\sqrt{5}$

$\left\{ x_1 = \frac{-1-\sqrt{5}}{4} \vee x_2 = \frac{-1+\sqrt{5}}{4} \right\} \wedge x > 0 \Rightarrow x = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$

Zatem z ΔAHC mamy:

$$\sin 18^\circ = \frac{|CH|}{|AC|} = \frac{x}{1} = x = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$$



Rysunek do zadania 3.

Uwaga

sin 18° jest wyjściową wartością, za pomocą której możemy obliczyć dowolną wielokrotność kąta 18°, co pokazują kolejne zadania.

Przy okazji warto wspomnieć, że cos 18° obliczamy, wykorzystując jedynkę trygonometryczną (1):

$$\cos 18^\circ = \sqrt{1-\sin^2 18^\circ} = \sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)^2} = \sqrt{\frac{10+2\sqrt{5}}{16}} = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$$

Zadanie 4

Oblicz sin 36° bez użycia kalkulatora i tablic.

Rozwiązanie:

W zadaniu 3 pokazano, jak obliczyć sin 18°. Wartość tą wykorzystamy przy cosinusie podwojonego kąta.

$$\cos 36^\circ \overset{(4)}{=} 1-2\sin^2 18^\circ$$

$$\cos 36^\circ = 1-2\cdot\left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)^2 = 1-2\cdot\frac{6-2\sqrt{5}}{8} = \frac{\sqrt{5}+1}{4}$$

sin 36° obliczymy teraz, wykorzystując jedynkę trygonometryczną (1) i pamiętając, że $\sin 36^\circ > 0$.

$$\sin 36^\circ = \sqrt{1-\cos^2 36^\circ} = \sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{5}+1}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$$

Zadanie 5

Oblicz sin 54° bez użycia kalkulatora i tablic.

Rozwiązanie:

$\sin 54° \overset{(12)}{=} \sin(90° - 36°) = \cos 36°$

W zadaniu 4 pokazano, jak obliczyć cos 36°.

Zatem $\sin 54° = \cos 36° = \frac{\sqrt{5}+1}{4}$.

Zadanie 6

Oblicz sin 72° bez użycia kalkulatora i tablic.

Rozwiązanie:

Wiemy już, jak obliczyć sin 18° (zadanie 3), zatem:

$$\sin 72° = \sin(90° - 18°) \overset{(12)}{=} \cos 18° = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}.$$

Zadanie 7

Wykaż bez użycia tablic i kalkulatora, że $\cos 36° \cos 72° = \frac{1}{4}$.

Rozwiązanie:

$L = \cos 36° \cos 72° =$

Mnożymy i dzielimy wyrażenie przez 2sin36° w celu uzyskania wzoru na sinus podwojonego kąta.

$$= \frac{2\sin 36° \cos 36° \cos 72°}{2\sin 36°} \overset{(3)}{=} \frac{\sin 72° \cos 72°}{2\sin 36°} \cdot \frac{2}{2} = \frac{2\sin 72° \cos 72°}{4\sin 36°} \overset{(3)}{=} \frac{\sin 144°}{4\sin 36°} =$$

$$= \frac{\sin(180° - 36°)}{4\sin 36°} = \frac{\sin 36°}{4\sin 36°} = \frac{1}{4} = P$$

cnd.

Zadanie 8

Wykaż bez użycia tablic i kalkulatora, że $\operatorname{tg}15° + \operatorname{ctg}15° = 4$.

Rozwiązanie:

$$L = \operatorname{tg}15° + \operatorname{ctg}15° \overset{(2)}{=} \frac{\sin 15°}{\cos 15°} + \frac{\cos 15°}{\sin 15°} = \frac{\sin^2 15° + \cos^2 15°}{\sin 15° \cos 15°} = \frac{1}{\sin 15° \cos 15°} \cdot \frac{2}{2} \overset{(3)}{=} \frac{2}{\sin 30°} = \frac{2}{\frac{1}{2}} = 4 = P$$

cnd.

Zadanie 9

Wykaż bez użycia tablic i kalkulatora, że $\frac{\mathrm{ctg}15^\circ - \mathrm{tg}15^\circ}{2} = \sqrt{3}$.

Rozwiązanie:

$$L = \frac{\mathrm{ctg}15^\circ - \mathrm{tg}15^\circ}{2} \overset{(2)}{=} \frac{\frac{\cos 15^\circ}{\sin 15^\circ} - \frac{\sin 15^\circ}{\cos 15^\circ}}{2} = \frac{\frac{\cos^2 15^\circ - \sin^2 15^\circ}{\sin 15^\circ \cos 15^\circ}}{2} = \frac{\cos^2 15^\circ - \sin^2 15^\circ}{2\sin 15^\circ \cos 15^\circ} \overset{(3),(4)}{=} \frac{\cos 30^\circ}{\sin 30^\circ} \overset{(2)}{=}$$

$$\overset{(2)}{=} \mathrm{ctg}30^\circ = \sqrt{3} = P$$

cnd.

Zadanie 10

Wykaż bez użycia tablic i kalkulatora, że $\cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ = \frac{1}{8}$.

Rozwiązanie:

$$L = \cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ =$$

Mnożymy i dzielimy wyrażenie przez 2sin20° w celu uzyskania wzoru na sinus podwojonego kąta.

$$= \frac{2\sin 20^\circ \cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ}{2\sin 20^\circ} \overset{(3)}{=} \frac{\sin 40^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ}{2\sin 20^\circ} \cdot \frac{2}{2} =$$

$$= \frac{2\sin 40^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ}{4\sin 20^\circ} \overset{(3)}{=} \frac{\sin 80^\circ \cos 80^\circ}{4\sin 20^\circ} \cdot \frac{2}{2} = \frac{\sin 160^\circ}{8\sin 20^\circ} =$$

$$= \frac{\sin(180^\circ - 20^\circ)}{8\sin 20^\circ} \overset{(12)}{=} \frac{\sin 20^\circ}{8\sin 20^\circ} = \frac{1}{8} = P$$

cnd.

Zadanie 11

Wiedząc, że $\sin 10^\circ = m$, oblicz $\sin 35^\circ$.

Rozwiązanie:

$$\sin 35^\circ = \sin(45^\circ - 10^\circ) \overset{(8)}{=} \sin 45^\circ \cos 10^\circ - \cos 45^\circ \sin 10^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}\cos 10^\circ - \frac{\sqrt{2}}{2}\sin 10^\circ =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos 10^\circ - \sin 10^\circ) \overset{(1)}{=} \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\sqrt{1 - \sin^2 10^\circ} - \sin 10^\circ\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\sqrt{1 - m^2} - m\right)$$

Zadanie 12

Oblicz bez użycia tablic i kalkulatora

$\sin 5^\circ \sin 15^\circ \sin 25^\circ \sin 35^\circ \sin 45^\circ \cos 35^\circ \cos 25^\circ \cos 15^\circ \cos 5^\circ$.

Rozwiązanie:

$\sin 5^\circ \sin 15^\circ \sin 25^\circ \sin 35^\circ \sin 45^\circ \cos 35^\circ \cos 25^\circ \cos 15^\circ \cos 5^\circ =$

$= \sin 5^\circ \cos 5^\circ \sin 15^\circ \cos 15^\circ \sin 25^\circ \cos 25^\circ \sin 35^\circ \cos 35^\circ \sin 45^\circ =$

Mnożymy i dzielimy wyrażenie przez 16.

$$= \frac{2\sin 5^\circ \cdot \cos 5^\circ \cdot 2\sin 15^\circ \cdot \cos 15^\circ \cdot 2\sin 25^\circ \cdot \cos 25^\circ \cdot 2\sin 35^\circ \cdot \cos 35^\circ \cdot \sin 45^\circ}{16} \overset{(3)}{=}$$

$$= \frac{\sin 10^\circ \cdot \sin 30^\circ \cdot \sin 50^\circ \cdot \sin 70^\circ \cdot \sin 45^\circ}{16} = \frac{\sin 10^\circ \cdot \frac{1}{2} \cdot \sin 50^\circ \cdot \sin 70^\circ \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}}{16} =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{64} \sin 10^\circ \cdot \sin 50^\circ \cdot \sin 70^\circ =$$

Mnożymy i dzielimy wyrażenie przez 2cos10° w celu uzyskania wzoru na sinus podwojonego kąta.

$$= \frac{\sqrt{2}}{64} \cdot \frac{2\sin 10^\circ \cdot \cos 10^\circ}{2\cos 10^\circ} \cdot \sin 50^\circ \cdot \sin(90^\circ - 20^\circ) \overset{(3)}{=}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{128} \frac{\sin 20^\circ}{2\cos 10^\circ} \cdot \sin 50^\circ \cdot \cos 20^\circ = \frac{\sqrt{2}}{128} \frac{2\sin 20^\circ \cdot \cos 20^\circ}{2\cos 10^\circ} \cdot \sin 50^\circ \overset{(3)}{=}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{256} \frac{\sin 40^\circ}{\cos 10^\circ} \cdot \sin(90^\circ - 50^\circ) = \frac{\sqrt{2}}{256} \frac{2\sin 40^\circ \cdot \cos 40^\circ}{2\cos 10^\circ} \overset{(3)}{=} \frac{\sqrt{2}}{512} \frac{\sin 80^\circ}{\cos 10^\circ} = \frac{\sqrt{2}}{512} \frac{\sin(90^\circ - 80^\circ)}{\cos 10^\circ} =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{512} \frac{\cos 10^\circ}{\cos 10^\circ} = \frac{\sqrt{2}}{512}$$

Zadanie 13

Udowodnij tożsamość (bez użycia tablic i kalkulatora):

$\cos 5^\circ \sin 15^\circ \sin 25^\circ \sin 35^\circ = \sin 5^\circ \cos 15^\circ \cos 25^\circ \cos 35^\circ$.

Rozwiązanie:

$\cos 5^\circ \sin 15^\circ \sin 25^\circ \sin 35^\circ = \sin 5^\circ \cos 15^\circ \cos 25^\circ \cos 35^\circ$

Korzystamy ze wzorów: (15), (16) i (17).

$\frac{1}{2}(\sin 20^\circ + \sin 10^\circ) \cdot \frac{1}{2}(\cos 10^\circ - \cos 60^\circ) = \frac{1}{2}(\sin 20^\circ - \sin 10^\circ) \cdot \frac{1}{2}(\cos 10^\circ + \cos 60^\circ)$

Mnożymy obustronnie przez 4.

$(\sin 20^\circ + \sin 10^\circ)(\cos 10^\circ - \cos 60^\circ) = (\sin 20^\circ - \sin 10^\circ)(\cos 10^\circ + \cos 60^\circ)$

$\sin 20^\circ \cdot \cos 10^\circ - \sin 20^\circ \cdot \cos 60^\circ + \sin 10^\circ \cdot \cos 10^\circ - \sin 10^\circ \cdot \cos 60^\circ =$

$= \sin 20^\circ \cdot \cos 10^\circ + \sin 20^\circ \cdot \cos 60^\circ - \sin 10^\circ \cdot \cos 10^\circ + \sin 10^\circ \cdot \cos 60^\circ$

Po uporządkowaniu mamy:

$2\sin 10^\circ \cdot \cos 10^\circ = 2\sin 20^\circ \cdot \cos 60^\circ$

$\sin 20^\circ = 2\sin 20^\circ \cdot \cos 60^\circ / : 2\sin 20^\circ$

$\frac{1}{2} = \cos 60^\circ$

Zatem przeprowadzając tożsamościowe działania, uzyskaliśmy równanie zawsze prawdziwe. Tożsamość została udowodniona.

cnd.

Zadanie 14

Udowodnij bez użycia tablic i kalkulatora następującą równość:

$\frac{1}{\sin 10^\circ} - 4\sin 70^\circ = 2$.

Rozwiązanie:

Wykorzystamy wzór (5):

$\sin 3x = \sin x(3 - 4\sin^2 x)$

$\sin 30^\circ = \sin 10^\circ(3 - 4\sin^2 10^\circ)$

Przegrupowując wyrazy po prawej stronie, otrzymujemy:

$\sin 30^\circ = 2\sin 10^\circ(1 - 2\sin^2 10^\circ) + \sin 10^\circ$

Wykorzystując wzór (4), otrzymujemy:

$\frac{1}{2} = 2\sin 10^\circ \cos 20^\circ + \sin 10^\circ / \cdot 2$

$1 = 4\sin 10^\circ \cos 20^\circ + 2\sin 10^\circ$

$1 - 4\sin 10^\circ \sin 70^\circ = 2\sin 10^\circ / : \sin 10^\circ$

$\frac{1}{\sin 10^\circ} - 4\sin 70^\circ = 2$

cnd.

Zadanie 15

Udowodnij bez użycia tablic i kalkulatora: $\sin 77^\circ - \sin 41^\circ + \sin 31^\circ + \sin 5^\circ = \cos 23^\circ$.

Rozwiązanie:

$$L = \sin 77^\circ - \sin 41^\circ + \sin 31^\circ + \sin 5^\circ = \sin 77^\circ + \sin 5^\circ + \sin 31^\circ - \sin 41^\circ =$$

$$\overset{(18),(19)}{=} 2\sin 41^\circ \cos 36^\circ - 2\sin 5^\circ \cos 36^\circ = 2\cos 36^\circ(\sin 41^\circ - \sin 5^\circ) =$$

$$\overset{(19)}{=} 2\cos 36^\circ \cdot 2\sin 18^\circ \cos 23^\circ = 4\cos 36^\circ \sin 18^\circ \cos 23^\circ =$$

Wiedząc, że $\sin 36^\circ = 2\sin 18^\circ \cos 18^\circ$, możemy wyznaczyć $\sin 18^\circ = \frac{\sin 36^\circ}{2\cos 18^\circ}$.

Zatem kontynuujemy nasze obliczenia:

$$= 4\cos 36^\circ \cdot \frac{\sin 36^\circ}{2\cos 18^\circ} \cdot \cos 23^\circ = \frac{2\cos 36^\circ \sin 36^\circ}{\cos 18^\circ} \cdot \cos 23^\circ \overset{(3)}{=} \frac{\sin 72^\circ}{\cos 18^\circ} \cdot \cos 23^\circ =$$

$$= \frac{\sin(90^\circ - 18^\circ)}{\cos 18^\circ} \cdot \cos 23^\circ \overset{(12)}{=} \frac{\cos 18^\circ}{\cos 18^\circ} \cdot \cos 23^\circ = \cos 23^\circ = P$$

cnd.

Zadanie 16

Udowodnij bez użycia tablic i kalkulatora, że $\mathrm{tg}20^\circ$ jest liczbą niewymierną.

Rozwiązanie:

Teza: $\mathrm{tg}20^\circ \in NW$.

Przeprowadzimy dowód nie wprost.

Załóżmy, że $\mathrm{tg}20^\circ$ jest liczbą wymierną. Wykorzystujemy wzór:

(7) $\mathrm{tg}2x = \frac{2\mathrm{tg}x}{1-\mathrm{tg}^2 x}$, czyli $\mathrm{tg}40^\circ = \frac{2\mathrm{tg}20^\circ}{1-\mathrm{tg}^2 20^\circ}$.

Założyliśmy, że $\mathrm{tg}20^\circ$ jest liczbą wymierną, więc $\mathrm{tg}40^\circ$ też jest liczbą wymierną.

Wykorzystajmy teraz wzór:

$\mathrm{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\mathrm{tg}\alpha + \mathrm{tg}\beta}{1-\mathrm{tg}\alpha \cdot \mathrm{tg}\beta}$ do rozpisania $\mathrm{tg}60^\circ$.

$$\mathrm{tg}60^\circ = \mathrm{tg}(40^\circ + 20^\circ) = \frac{\mathrm{tg}40^\circ + \mathrm{tg}20^\circ}{1-\mathrm{tg}40^\circ \cdot \mathrm{tg}20^\circ}$$

Zgodnie z naszym założeniem, wyrażenie $\frac{\mathrm{tg}40^\circ + \mathrm{tg}20^\circ}{1 - \mathrm{tg}40^\circ \cdot \mathrm{tg}20^\circ}$ należy do liczb wymiernych. Wiemy jednak, że $\mathrm{tg}60^\circ = \sqrt{3}$, czyli należy do liczb niewymiernych. Zatem otrzymaliśmy sprzeczność z naszym założeniem. Zgodnie z zasadą dowodu nie wprost: nasze założenie okazało się fałszywe, zatem $\mathrm{tg}20^\circ$ jest liczbą niewymierną (dodatkowo można jeszcze wykazać, że $\sqrt{3}$ jest liczbą niewymierną, ale to już pozostawiam Czytelnikowi).

cnd.

Na zakończenie naszych rozważań należy wspomnieć, że niestety, nie dla wszystkich wartości kątów można obliczyć dokładne wartości funkcji trygonometrycznych, np. zobaczmy, co się dzieje, gdy chcemy wyznaczyć dokładną wartość $\sin 10^\circ$. Pozornie wygląda na to, że dość szybko obliczymy tę wartość, wykorzystując wzór:

$\sin 3x = \sin x\left(3 - 4\sin^2 x\right)$

$\sin 30^\circ = \sin 10^\circ\left(3 - 4\sin^2 10^\circ\right)$

Możemy podstawić nową zmienną:

$\sin 10^\circ = t$

$\frac{1}{2} = t\left(3 - 4t^2\right)$

Po uporządkowaniu mamy:

$8t^3 - 6t + 1 = 0$

Otrzymaliśmy dość ładne równanie trzeciego stopnia. Niestety, równanie to nie ma pierwiastków wymiernych i żeby je rozwiązać, trzeba sięgnąć np. do wzorów Cardano i liczb zespolonych lub do przybliżonych metod rozwiązywania równań. Ale to już zupełnie odrębne zagadnienie.

Mam nadzieję, że przedstawione rozwiązania problemów zawartych w zadaniach niejednokrotnie będą przydatne w różnych zastosowaniach.

Tomasz Grębski

Nauczyciel matematyki w Zespole Szkół Nr 2 im. M. Reja w Kraśniku, autor portalu: www.tomaszgrebski.pl