Standardy *kształcenia* uczniów zdolnych

Indywidualne prowadzenie uczniów mających predyspozycje do matematyki jest podstawowym obowiązkiem każdego nauczyciela.

■ JERZY JANOWICZ

O uzdolnieniach matematycznych nie może świadczyć biegłość rachunkowa, ani sprawność w rozwiązywaniu mniej lub bardziej złożonych zadań, ale wysoko rozwinięte pewne umiejętności ogólne, nie związane z konkretnym materiałem, choć mocno osadzone w matematyce. Obejmować one powinny, w miarę możliwości, wszystkie obszary aktywności matematycznej, od czynności typowo warsztatowych do odkrywania i tworzenia. Propozycja pięciu standardów kształcenia, przedstawiona poniżej, jest próbą takiego właśnie spojrzenia na edukację osób uzdolnionych. Mimo że standardy ilustrowane są zadaniami z poziomu gimnazjum, przedstawiona kodyfikacja jest bardziej uniwersalna. Służyć może ona nauczycielom mającym pod opieką utalentowanych uczniów zarówno szkoły podstawowej, gimnazjum, jak i szkół ponadgimnazjalnych.

A – Sprawne wykonywanie typowych czynności matematycznych. Ten standard związany jest z nabyciem biegłości w posługiwaniu się narzędziami matematycznymi na takim poziomie, aby nie stanowiły one dodatkowej trudności przy wykonywaniu czynności wyższego rzędu. Do tych typowo technicznych umiejętności zaliczyć można:

- obliczanie,
- konstruowanie,
- przekształcanie (arytmetyczne, algebraiczne, geometryczne),
- układanie i rozwiązywanie równań, nierówności oraz ich układów,
- sporządzanie zestawień, diagramów, wykresów,
- zapisywanie zależności językiem matematyki.

Uczeń nie potrafiący sprawnie wykonywać tych czynności, nie będzie mógł w pełni wykorzystać posiadanych predyspozycji, skupiając się na kwestiach drugorzędnych i upatrując główny problem nie tam, gdzie przez autora zadania został on rzeczywiście umieszczony, ale w rachunkach, przekształceniach, układaniu równań itp. Z drugiej strony podkreślić trzeba, że bezproblemowe wykonywanie tych czynności to zaledwie rzemiosło i do sztuki uprawiania matematyki jest jeszcze daleko.

Standard A – przykłady zadań

A1. Trzy soczki i dwa batony kosztują 9,60 zł, trzy batony i dwa jogurty kosztują 8,70 zł, a trzy jogurty i dwa soczki kosztują 7,20 zł. Czy wystarczy 20 zł, aby kupić cztery soczki, cztery batony i cztery jogurty?

A2. Która figura ma większe pole: dwunastokąt foremny wpisany w okrąg o promieniu długości 1, czy kwadrat o boku długości $\sqrt{3}$?

A3. Suma dwóch liczb dodatnich jest czterokrotnie większa od ich różnicy, a iloczyn tych liczb jest czterokrotnie większy od ich ilorazu. Znajdź te liczby.

B – Umiejętne prowadzenie rozumowania. Tu także pobrzmiewa techniczna strona aktywności matematycznej, choć na znacznie wyższym poziomie ogólności. Przeważa tu mianowicie całościowe spojrzenie na prowadzony proces i dobieranie pod tym kątem określonych procedur. Jest to standard bardzo już oderwany od treści i dotyczący następujących (przykładowych) umiejętności:

- tworzenie logicznego ciągu wniosków,
- matematyzacja,
- interpretacja rozumowania lub jego rezultatów,
- wykorzystywanie i przetwarzanie informacji danych w różnych formach,
- wyjaśnianie zauważonych prawidłowości.

Jaka jest ranga tego standardu w kształceniu zdolności matematycznych? Jest on jednym z istotniejszych wskaźników. Uczeń, potrafiący umiejętnie prowadzić rozumowanie matematyczne, najprawdopodobniej posiada uzdolnienia kierunkowe. Trudności w tym zakresie nie dają się zwykle zrekompensować innymi umiejętnościami i najczęściej świadczą o niższych predyspozycjach matematycznych.

Standard B – przykłady zadań

B1. Jeśli każdy bok kwadratu zwiększymy o 10 cm, to pole powiększy się o 600 cm^2. O ile zmniejszy się pole tego kwadratu, gdy wszystkie jego boki skrócimy o 1 cm?

B2. Używając jedynie cyfr 3 i 7 (każdej przynajmniej raz), zapisz liczbę dającą przy dzieleniu przez 3 taką samą resztę, jak przy dzieleniu przez 7.

B3. Oblicz pole trójkąta, którego dwa boki mają długość 1, a kąt między nimi ma rozwartość:
a) 30°; b) 45°; c) 135°; d) 150°.

C – Heurystyka matematyczna. Jest to standard, którego spełnienie jednoznacznie świadczy o tym, że uczeń ma „iskrę bożą”. Osobom posiadającym przeciętne predyspozycje matematyczne obce są umiejętności takie jak:

- pomysłowość,
- błyskotliwość,
- prostota rozumowania,
- oryginalność,

a to one właśnie sprawiają, że pewne rozwiązania budzą zdumienie swoją elegancją i (chyba nie będzie to nadużyciem tego słowa) artyzmem. Są to niestety cechy, które wynikają z ogólnej konstrukcji psychicznej, nie można ich więc „wszczepić” uczniom, choć na pewno zawsze należy je próbować podciągnąć na jak najwyższy poziom. Jak to robić? Takimi sposobami są np. prezentowanie pomysłowych rozwiązań, czy poszukiwanie innych rozwiązań danego zadania w myśl reguły, że lepiej rozwiązać jedno zadanie pięcioma sposobami, niż pięć zadań jednym sposobem. Z jednej strony wzbudzić to może tendencję do cyzelowania własnych rozumowań, a z drugiej zaś – daje pomysł, który jako gotowy szablon można wykorzystywać w innych sytuacjach. Ta druga opcja jest bardziej dostępna działaniom dydaktycznym – zwłaszcza wobec osób z przeciętnym poziomem umiejętności heurystycznych. Tu podawanie gotowych substytutów wydaje się najrozsądniejszym wyjściem.

Standard C – przykłady zadań

C1. Z dwóch wielokątów pierwszy ma o jeden bok mniej, niż drugi i o 100 przekątnych mniej, niż drugi. Ile boków mają te wielokąty?

C2. Do pewnego roztworu cukru dosypano tyle cukru, że jego stężenie podwoiło się. Następnie dolano tyle wody, że stężenie wróciło do stanu początkowego. Co waży więcej: dosypany cukier, czy dolana woda?

C3. W pięciokącie wpisanym w okrąg cztery boki są tej samej długości, a kąty przy piątym boku długości 2 są proste. Oblicz pole pięciokąta.

D – Samodzielne rozwiązywanie problemów. Innym obszarem aktywności ucznia utalentowanego jest jego samodzielność matematyczna, zwłaszcza w rozwiązywaniu problemów. Bez tego trudno mówić o uzdolnieniach w tym kierunku. W czym zasadzają się umiejętności objęte tym standardem? Przede wszystkim jest to:

- odkrywanie struktury logicznej,
- stawianie i weryfikacja hipotez,
- dobór adekwatnych narzędzi,
- tworzenie i realizacja schematu rozwiązania problemu,
- odpowiednia interpretacja uzyskanych wyników.

Opanowanie tych umiejętności świadczy o wysokim poziomie uzdolnień w zakresie matematyki i dużej samodzielności poznawczej. Tu także pewne umiejętności są najprawdopodobniej wrodzone, nie są generowane w wyniku oddziaływań edukacyjnych, chociaż cały system zabiegów pedagogicznych jest w stanie je wyeksponować, udoskonalić i pokazać ich wartość. Wartość ta ma swoją wagę nie tylko w matematyce, ale jest uniwersalna, przenoszona na inne dyscypliny, czy wręcz jest interdyscyplinarna. Ten transfer jest ubocznym, ale bardzo cennym efektem kształcenia talentu matematycznego.

Standard D – przykłady zadań

D1. Dane są trzy liczby:

$$x = 3333 \cdot 4444 - 1111 \cdot 2222,$$
$$y = 2222 \cdot 4444 - 1111 \cdot 3333,$$
$$z = 2222 \cdot 3333 - 1111 \cdot 4444.$$

Czy jest prawdą, że jedna z tych liczb jest równa iloczynowi dwóch pozostałych? Odpowiedz nie obliczając wartości liczb x, y, z.

D2. W trapezie trzy boki są tej samej długości. Jak za pomocą samej linijki podzielić dwa jego kąty na dwie równe części?

D3. Liczby x, y są dodatnie i $x < y$. Jak zmieni się wartość wyrażenia

$$\frac{\frac{x-y}{x+y}+1}{\frac{x+y}{x-y}-1},$$

gdy x i y zamienimy miejscami?

E – Kreatywność matematyczna. Jest to najwyższy szczebel rozwoju matematycznego uczniów, stąd jest to również standard najtrudniejszy do osiągnięcia. Może właśnie dlatego stanowić powinien wyzwanie dla nauczyciela (dla ucznia chyba również) i motywować do znajdowania takich zabiegów dydaktycznych, które pozwoliłyby uczniom na skuteczne podjęcie prób takich działań, jak:

- formułowanie nowych problemów,
- dostrzeganie, wskazywanie analogii,

- dokonywanie uogólnień i klasyfikacji,
- tworzenie nowych struktur matematycznych,
- dostrzeganie modeli matematycznych w obszarach wcześniej nie eksplorowanych przez tę naukę.

Jest to – na poziomie uczniowskim – model pracy niemalże naukowej. Wymaga on z pewnością dużego talentu, choć mądry przewodnik w osobie odpowiedzialnego nauczyciela jest w stanie wiele tu zrobić. Pierwszym krokiem powinno być uświadomienie uczniowi jego własnych możliwości, kolejno – wspólne budowanie dla niego indywidualnej ścieżki rozwoju z jasno nakreślonymi celami. Cały czas powinny być śledzone wskaźniki świadczące o czynionych postępach. A jak jest w tym przypadku z osobami o przeciętnych zdolnościach matematycznych? Ci również, pracując na swoim poziomie umiejętności, mogą próbować – z pozytywnym skutkiem – działań twórczych. Oczywiście rezultaty najczęściej będą na miarę posiadanych możliwości, choć przy odpowiedniej motywacji, mogą stać się zaczynem do dalszych prób i stanowić ważki element kształcenia myślenia koncepcyjnego.

Standard E – przykłady zadań:

E1. Rozpoczynając od pewnej liczby naturalnej, wypisano 5 kolejnych jej wielokrotności. Suma trzech najmniejszych z nich jest równa 33 330. Ile wynosi suma trzech największych? Jakie są możliwości uogólnienia tego zadania? Sformułuj i rozwiąż kilka propozycji.

E2. Czy w dziewięciokącie foremnym są dwie przekątne przecinające się pod kątem prostym? Czy to zadanie można uogólnić?

E3. Spośród liczb: 30, 31, 32, 33 jedna jest dzielnikiem, inna ilorazem, a jeszcze inna – resztą w pewnym dzieleniu liczby trzycyfrowej. Znajdź tę liczbę. Czy zadanie ma tylko jedno rozwiązanie?

Zaprezentowane standardy, to jedna z wielu możliwości skodyfikowania oddziaływań dydaktycznych ukierunkowanych na rozwijanie zdolności matematycznych. Ma ona na celu pełne uświadomienie kierunków i obszarów tych działań, w szczególności zaś – zwrócenie uwagi na to, że czynnikami porządkującymi te działania nie powinny być treści, ale umiejętności. Takie ujęcie ma ten dodatkowy walor, że wyzwala kształcenie ponadprzedmiotowe, co eksponuje utylitarną rolę matematyki.

ROZWIĄZANIA ZADAŃ

Standard A

A1. Pięć soczków, pięć batonów i pięć jogurtów kosztuje

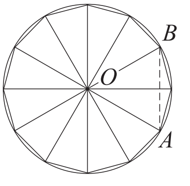
9,60 zł + 8,70 zł + 7,20 zł = 25,50 zł.

Zatem cztery soczki, cztery batony i cztery jogurty kosztują 20,40 zł (dlaczego?). Odpowiedź na postawione w zadaniu pytanie jest więc negatywna.

A2. Dwunastokąt foremny można podzielić na sześć deltoidów o równych przekątnych. W naszym przypadku każda z nich jest równa promieniowi okręgu. Pole dwunastokąta jest więc równe

$$6 \cdot 0{,}5 \cdot 1 \cdot 1 = 3,$$

a pole kwadratu – $(\sqrt{3})^2 = 3$. Pola są więc równe.



A3. Niech x, y będą szukanymi liczbami. Wtedy

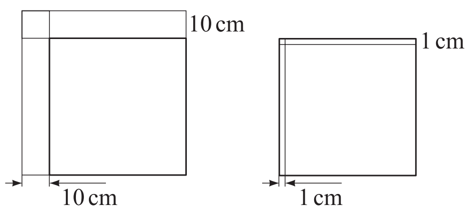
$$\begin{cases} x+y=4(x-y) \\ xy=4\cdot\dfrac{x}{y} \end{cases} \quad \text{lub} \quad \begin{cases} x+y=4(y-x) \\ xy=4\cdot\dfrac{x}{y} \end{cases}$$

Drugi warunek jest w obu przypadkach taki sam i można go przekształcić do postaci: $y = 4 \cdot \frac{1}{y}$, czyli $y^2 = 4$, a stąd przy $y > 0$ mamy $y = 2$. W pierwszym przypadku otrzymujemy więc: $x + 2 = 4(x - 2)$, skąd $x = 3\frac{1}{3}$; a w drugim: $x + 2 = 4(2 - x)$, czyli $x = 1\frac{1}{5}$. Są dwa rozwiązania: $3\frac{1}{3}$ i 2 oraz $1\frac{1}{5}$ i 2.

Standard B

B1. Na przyrost pola składa się pole kwadratu o boku 10 cm oraz pola dwóch prostokątów. Pole jednego takiego prostokąta jest równe

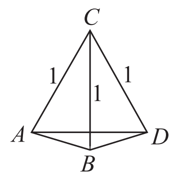
$$0{,}5(600 - 100)\ \text{cm}^2 = 250\ \text{cm}^2$$



Jeden z jego boków jest równy 10 cm, a drugi ma (250 : 10) cm = 25 cm i tyle jest równa długość boku kwadratu. Pole kwadratu jest równe $25^2\ \text{cm}^2 = 625\ \text{cm}^2$. Po skróceniu każdego boku o 1 cm pole będzie równe $24^2\ \text{cm}^2 = 576\ \text{cm}^2$, czyli zmniejszy się o $(625 - 576)\ \text{cm}^2 = 49\ \text{cm}^2$. Po skróceniu każdego boku o 1 cm pole kwadratu zmniejszy się o 49 cm^2.

B2. Analizując kolejno w porządku wzrastającym liczby zapisane zgodnie z warunkami zdania (37, 73, 337,377, 733, ...), stwierdzamy, że 337 jest rozwiązaniem zadania, gdyż przy dzieleniu przez 3 i przez 7 daje resztę 1. Czy potrafisz znaleźć inne liczby o tej własności?

B3.



a) Niech w trójkącie ABC

$\sphericalangle ACB = 30°$

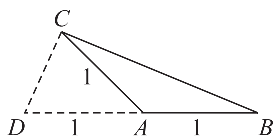
i $|CA| = |CB| = 1$.

Znajdujemy trójkąt BDC symetryczny do trójkąta ABC względem prostej BC. Wtedy trójkąt ADC jest równoboczny, stąd $P_{ABCD} = \frac{1 \cdot 1}{2} = \frac{1}{2}$, czyli $P_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$.

b) Analogicznie, jak w a). Pole jest równe $\frac{\sqrt{2}}{4}$.

c) Niech w trójkącie ABC

$\sphericalangle BAC = 135°$ i $|AB| = |AC| = 1$.



Na przedłużeniu odcinka AB poza punkt A znajdujemy taki punkt D, że $|AD| = 1$. Wtedy $P_{\Delta ABC} = P_{\Delta ADC}$, a wobec tego, że $\sphericalangle CAD = 45°$, mamy z b) $P_{\Delta ABC} = \frac{\sqrt{2}}{4}$.

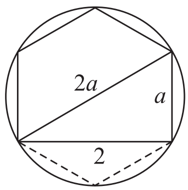
d) Analogicznie, jak w c). Pole jest równe $\frac{1}{4}$.

Standard C

C1. Oznaczmy: n – ilość boków pierwszego wielokąta, p – ilość przekątnych pierwszego wielokąta. Wybierzmy jeden wierzchołek drugiego wielokąta. Wychodzi z niego $(n + 1) - 3 = n - 2$ przekątnych. Drugi wielokąt ma $p + n - 2 + 1 = p + n - 1$ przekątnych. Stąd $n - 1 = 100$, czyli $n = 101$. Szukane wielokąty mają 101 i 102 boki. Rozwiązanie można uzyskać również posługując się wzorem na ilość przekątnych wielokąta.

C2. Końcowy efekt jest taki sam, jak przy dolaniu pewnej ilości takiego samego roztworu, jak dany na początku. Stąd, ponieważ jego stężenie było niższe niż 50% (w przeciwnym przypadku nie byłoby możliwe podwojenie stężenia), to cukru było mniej (wagowo) niż wody.

C3. Zauważmy, że pięciokąt można uzupełnić do sześciokąta foremnego. Pole pięciokąta stanowi $\frac{5}{6}$ pola tego sześciokąta. Oznaczmy bok sześciokąta przez a. Wówczas pole pięciokąta jest równe



$$P = \frac{5}{6} \cdot 6 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{5\sqrt{3}}{4}a^2.$$

Zachodzi związek: $2^2 + a^2 = (2a)^2$, skąd $a^2 = \frac{4}{3}$. Tak więc

$$P = \frac{5\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{4}{3} = \frac{5\sqrt{3}}{3}.$$

Standard D

D1. Mamy $z < y < x$ oraz

$$x = 3 \cdot 1111 \cdot 4 \cdot 1111 - 1111 \cdot 2 \cdot 1111 =$$
$$= 12 \cdot 1111^2 - 2 \cdot 1111^2 =$$
$$= (12-2) \cdot 1111^2.$$

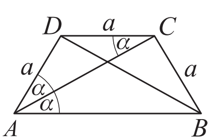
Analogicznie

$$y = (2 \cdot 4 - 1 \cdot 3) \cdot 1111^2 = 5 \cdot 1111^2$$

oraz $z = (2 \cdot 3 - 1 \cdot 4) \cdot 1111^2 = 2 \cdot 1111^2$.

Zatem $y \cdot z = 1111^2 \cdot x$. Odpowiedź: nie.

D2. Wystarczy poprowadzić przekątne. Rzeczywiście, oznaczmy w trapezie $ABCD$ kąt CAD przez α.



Wówczas $\sphericalangle DCA = \alpha$, gdyż ΔACD jest równoramienny. Ale także $\sphericalangle CAB = \alpha$, gdyż $\sphericalangle DCA$ i $\sphericalangle CAB$ są naprzemianległe. Ale stąd już wynika, że półprosta AC dzieli $\sphericalangle BAD$ na dwie równe części. Analogicznie – półprosta BD dzieli $\sphericalangle ABC$ na dwie równe części.

D3. Wyrażenie z zadania można przekształcić do postaci

$$\frac{x}{y} \cdot \frac{(y-x)^2}{(x+y)^2}.$$

Po zamianie miejscami liczb x i y wartość drugiego czynnika nie zmieni się. Ponieważ $0 < x < y$, więc $\frac{x}{y} < 1$, oraz $\frac{y}{x} > 1$. Wartość całego wyrażenia wzrośnie.

Standard E

E1. Oznaczmy przez a liczbę, od której rozpoczęto wypisywanie wielokrotności. Suma trzech najmniejszych wielokrotności wynosi

$$x = a + 2a + 3a = 6a,$$

a suma trzech największych

$$y = 3a + 4a + 5a = 12a.$$

Zauważmy, że

$$y = 12a = 2 \cdot 6a = 2x.$$

Tak więc

$$y = 2 \cdot 33\,330 = 66\,660.$$

Suma trzech największych liczb jest równa 66 660.

Uogólnienia zadania mogą być następujące.

- Rozpoczynając od pewnej liczby naturalnej, wypisano 5 kolejnych jej wielokrotności. Suma trzech najmniejszych z nich jest równa S. Ile jest równa suma trzech największych?

Z rozwiązania zadania w jego pierwotnej wersji wynika, że suma trzech największych liczb jest dwukrotnie większa od sumy trzech najmniejszych, czyli w tym przypadku będzie równa $2S$.

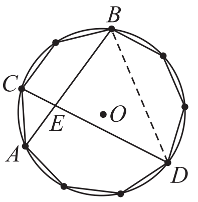
- Rozpoczynając od pewnej liczby naturalnej, wypisano 7 kolejnych jej wielokrotności. Suma pięciu najmniejszych z nich jest równa S. Ile jest równa suma pięciu największych?

Rozwiązanie – analogiczne, jak w początkowej wersji zadania. Odpowiedź: $\frac{5}{3}S$.

□ Rozpoczynając od pewnej liczby naturalnej, wypisano n kolejnych jej wielokrotności. Suma k najmniejszych z nich jest równa S. Ile jest równa suma k największych (przyjmujemy, że $k < n$)?

Rozwiązanie oparte jest na tym samym schemacie. Odpowiedź: $\frac{2n-k+1}{k+1}S$.

E2. Opiszmy na dziewięciokącie okrąg o środku O. Poprowadźmy dwie przekątne: AB i CD przecinające się w punkcie E. Połączmy odcinkiem BD końce tych przekątnych. Wtedy



$$\sphericalangle BED = 180° - (\sphericalangle CDB + \sphericalangle ABD) =$$
$$= 180° - \left(\frac{1}{2}\sphericalangle COB + \frac{1}{2}\sphericalangle AOD\right).$$

Rozwartości kątów COB i AOD są postaci $\frac{n}{9} \cdot 360°$. Stąd

$$\sphericalangle BED = 180° - \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{k}{9}\cdot 360° + \frac{l}{9}\cdot 360°\right) =$$
$$= 180° - (20°\cdot k + 20°\cdot l) = 20°\cdot(9-k-l).$$

Kąt prosty nie jest całkowitą wielokrotnością kąta 20°. Stąd odpowiedź jest negatywna.

Łatwo sformułować uogólnienie tego zadania na dowolne n-kąty foremne:

Dla jakiej liczby naturalnej n istnieje n-kąt foremny, w którym są dwie przekątne przecinające się pod kątem prostym?

W rozwiązaniu posłużmy się metodą i oznaczeniami z wersji tego zadania dla $n = 9$. Opiszmy na n-kącie okrąg o środku O. Poprowadźmy dwie przekątne: AB i CD przecinające się w punkcie E. Połączmy odcinkiem BD końce tych przekątnych. Wtedy

$$\sphericalangle BED = 180° - (\sphericalangle CDB + \sphericalangle ABD) =$$
$$= 180° - \left(\frac{1}{2}\sphericalangle COB + \frac{1}{2}\sphericalangle AOD\right).$$

Rozwartości kątów COB i AOD są postaci $\frac{m}{n}\cdot 360°$, gdzie $m \in \mathbb{N}$ i $m < n-1$. Stąd

$$\sphericalangle BED = 180° - \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{p}{n}\cdot 360° + \frac{q}{n}\cdot 360°\right) =$$
$$= \frac{360°}{2n}(p+q) = \frac{180°(p+q)}{n} =$$
$$= \frac{2(p+q)}{n}\cdot 90°.$$

Przy n nieparzystym ułamek $\frac{2(p+q)}{n}$ nie może być równy 1 (licznik jest parzysty, a mianownik – nie), więc dla takich wielokątów odpowiedź jest negatywna. Gdy n jest parzyste, czyli $n = 2t$, wystarczy wziąć $p = 1$ i $q = t-1$, aby uzyskać sposób poprowadzenia przekątnych przecinających się pod kątem prostym. Tak więc dla parzystego (i tylko takiego) $n \in \mathbb{N}$, $n > 3$ istnieje n-kąt foremny, w którym są dwie przekątne przecinające się pod kątem prostym.

E3. Reszta musi być mniejsza od dzielnika, więc nie może być największą z podanych liczb. Stąd resztą jest 30, 31 lub 32.

a) Reszta jest równa 30. Dzielna może być jedną z trzech następujących liczb:

$$31\cdot 32 + 30 = 1022,$$
$$31\cdot 33 + 30 = 1053,$$
$$32\cdot 33 + 30 = 1086.$$

b) Reszta jest równa 31. Dzielna może być jedną z trzech następujących liczb:

$$30\cdot 32 + 31 = 991,$$
$$30\cdot 33 + 31 = 1021,$$
$$32\cdot 33 + 31 = 1087.$$

c) Reszta jest równa 32. Dzielna może być jedną z dwóch następujących liczb:

$$30\cdot 33 + 32 = 1022,$$
$$31\cdot 33 + 32 = 1055.$$

Jak widać, tylko w jednym przypadku dzielna jest trzycyfrowa.

Dzielną w tym dzieleniu jest liczba 991 i jest to jedyne rozwiązanie zadania. ❑

JERZY JANOWICZ

nauczyciel w Gimnazjum nr 3 w Bolesławcu